

---

# Une méthode de calcul efficace pour l'étude paramétrique du flambage non-linéaire de structures tridimensionnelles : application à la fiabilité

Antoine Legay



## Motivation du travail

A l'initiative de la DGA-DCN: évaluer la fiabilité des structures sous-marines par rapport au flambage

Algorithme de fiabilité

[Gayton, Bourinet,  
Lemaire 2002]

Couplage

Deux problèmes :

- modéliser la physique
- limiter le temps de calcul

Code éléments finis : Stanlax–Inca

- Développement d'un nouvel élément fini
- Développement de méthodes paramétrées

# Plan

- Introduction au couplage mécanique-fiabilité du problème de flambage
  - le problème de fiabilité
  - le phénomène de flambage
  - un calcul original de couplage mécanique-fiabilité
- Modéliser correctement le phénomène mécanique :
  - un nouvel élément tridimensionnel pour l'analyse non-linéaire
- Limiter le temps du calcul mécanique :
  - calculs non-linéaires paramétrés particulièrement dédiés à la fiabilité
- Applications des méthodes paramétrées à des calculs de fiabilité

## Le problème de fiabilité

Le modèle fiabiliste d'une structure est défini par :

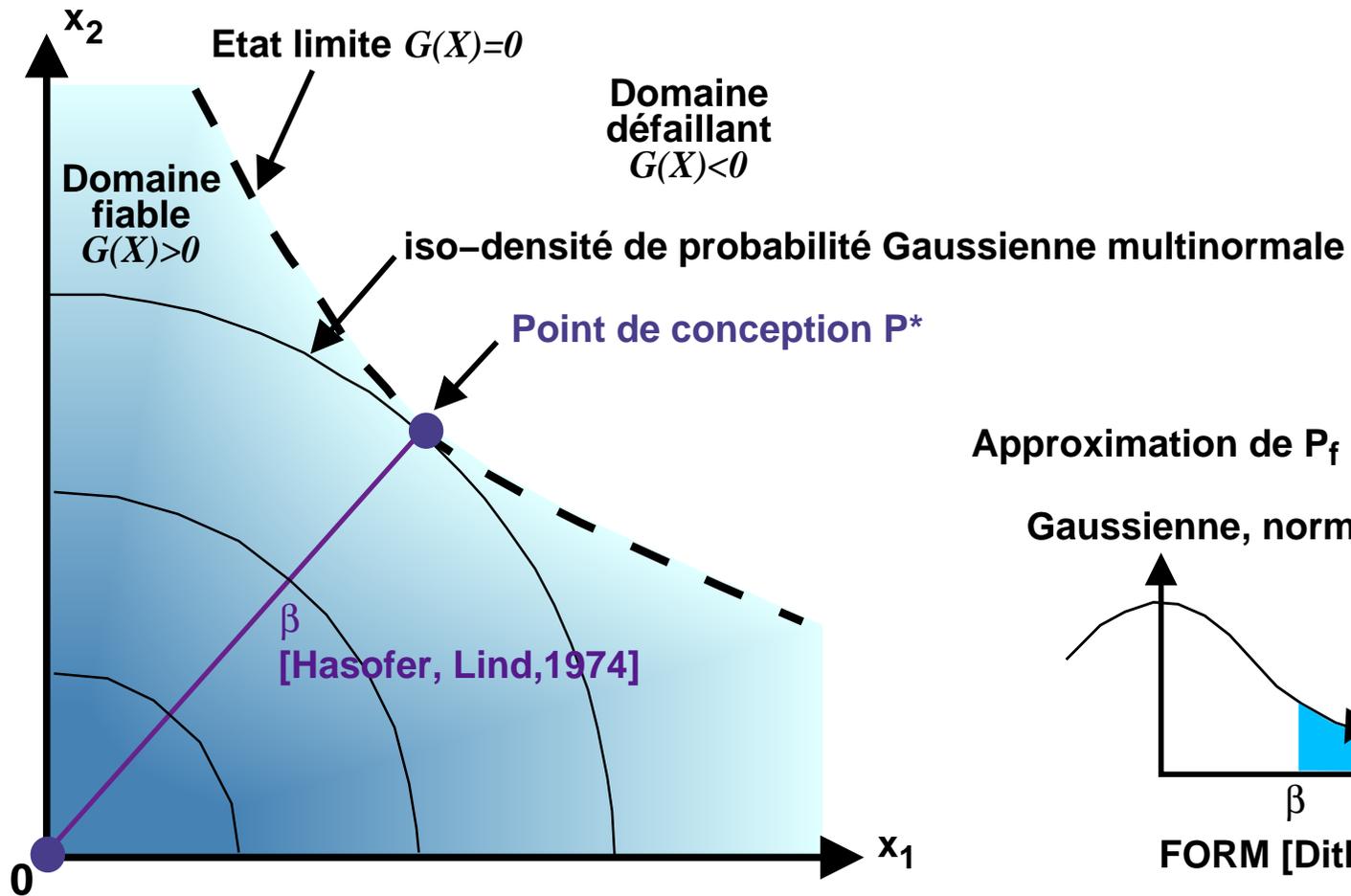
- un vecteur  $\mathbf{X}$  de  $n$  variables aléatoires
- une densité de probabilité  $f_{x_i}(x_i)$  pour chaque  $x_i$ , des corrélations éventuelles
- au moins un scénario de défaillance donné par la fonction de performance  $G(\mathbf{X})$  :

$$\text{domaine fiable : } \{\mathbf{X} / G(\mathbf{X}) > 0\}$$

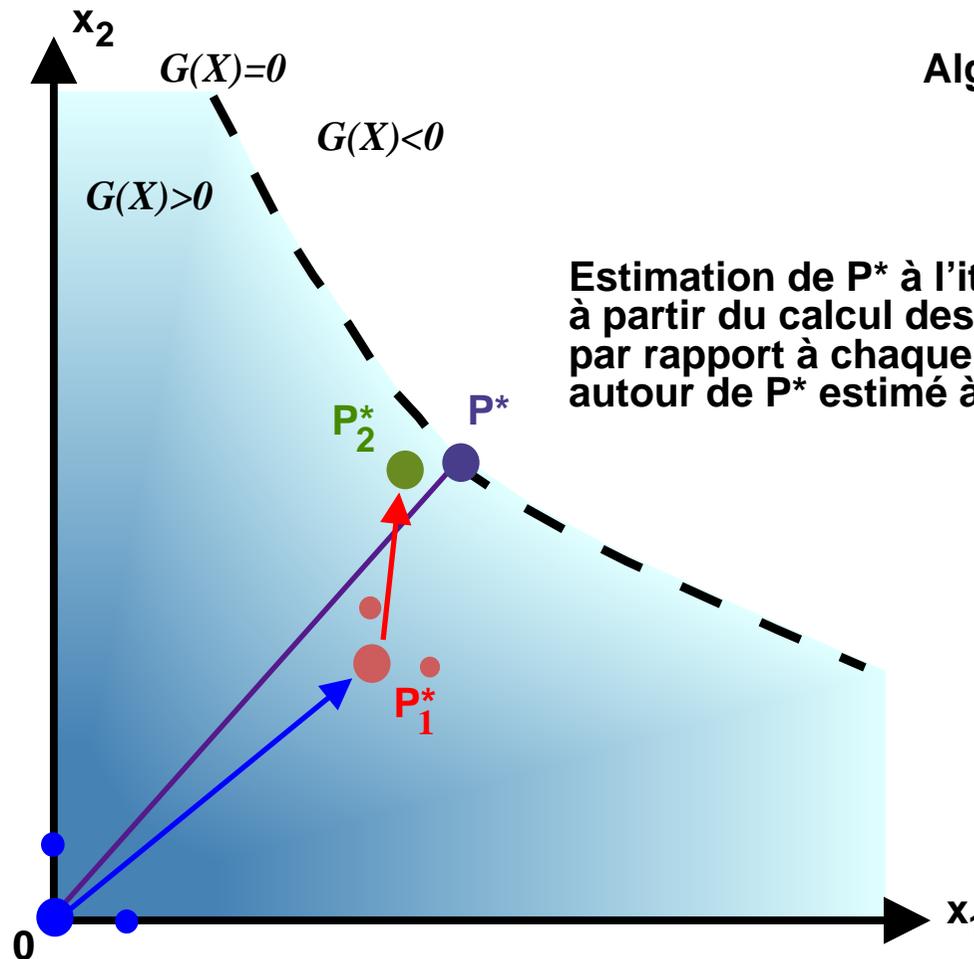
La probabilité de défaillance est donnée par :

$$P_f = \int_{G(\mathbf{X}) \leq 0} f(\mathbf{X}) \, dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

## Représentation dans l'espace normé



## Recherche du point de conception



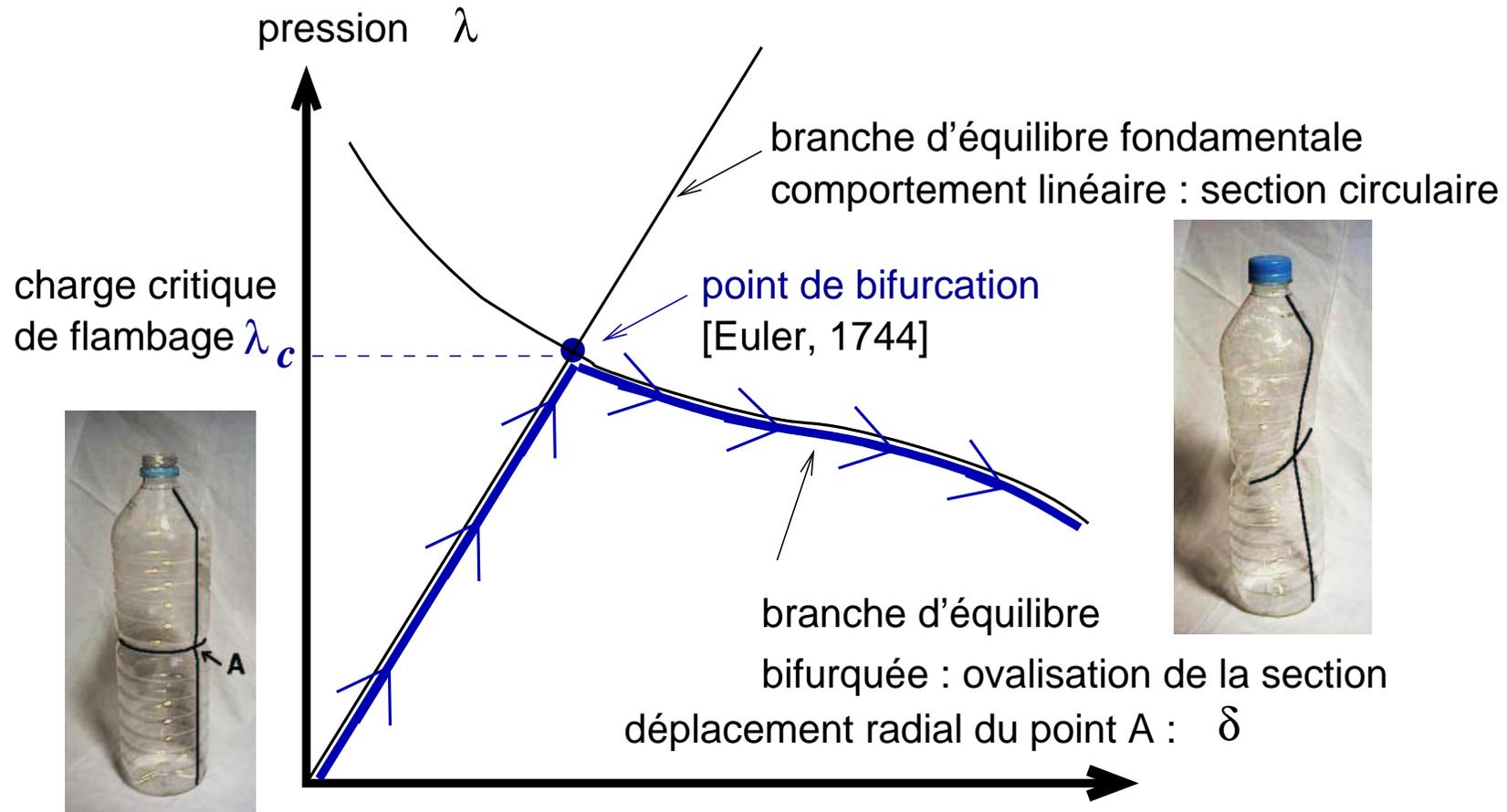
Algorithme de Rackwitz–Fiessler  
 [Rackwitz, Fiessler, 1979]  
 [Abdo, Rackwitz, 1990]

Estimation de  $P^*$  à l'itération  $k+1$   
 à partir du calcul des gradients de  $G(X)$   
 par rapport à chaque variable  
 autour de  $P^*$  estimé à l'itération  $k$

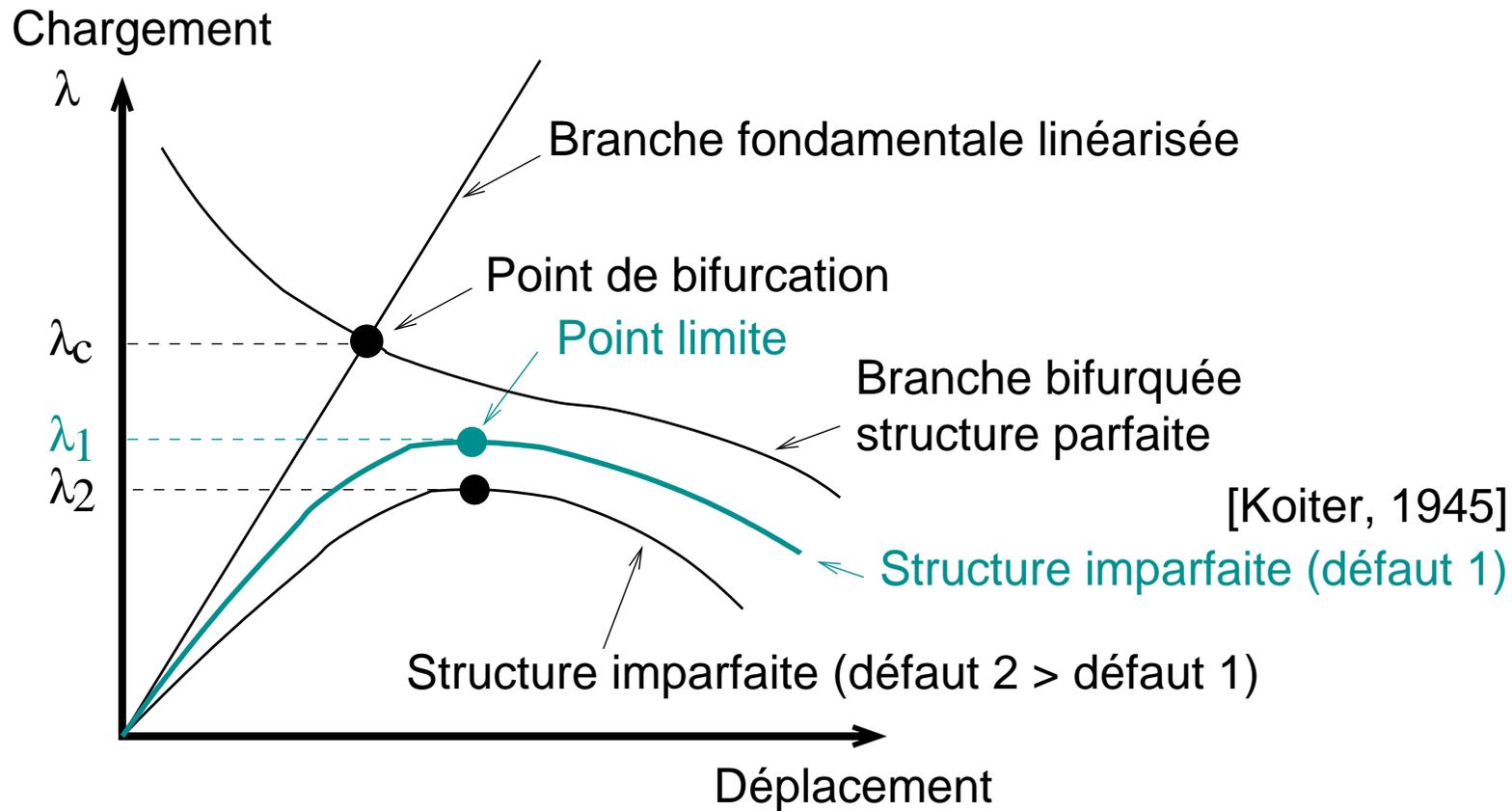
D'autres techniques :  
 surfaces de réponses  
 algorithmes d'évolutions :  
 mal adaptés à la fiabilité

L'évaluation de  $G$  demande des  
 calculs mécaniques pour des  
 paramètres voisins

# Le phénomène de flambage



## Réponse non-linéaire de la structure imparfaite



→ Algorithme de calcul non-linéaire

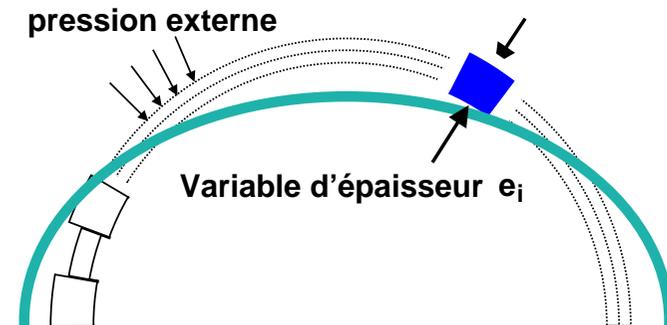
## Flambage d'un cylindre mince en pression externe

- Défaut géométrique sur l'harmonique 2
- Matériau élasto-plastique

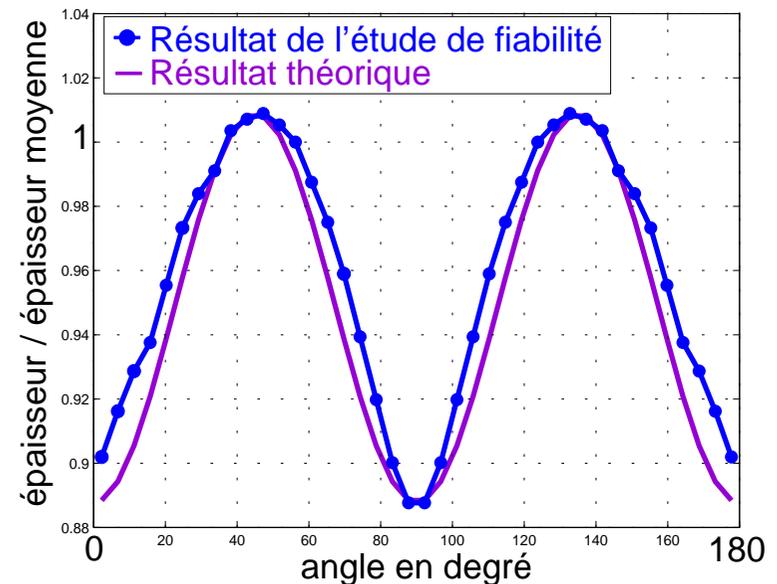
Utilisation du couplage mécanique-fiabilité :  
quelle est la répartition d'épaisseur la plus critique?

- Discrétisation circonférentielle :  
40 variables d'épaisseur aléatoires  
décorrélées et gaussiennes
- $G(\mathbf{X}) = P_{cr}(\mathbf{X}) - P_0$

Résultat attendu : répartition suivant l'harmonique 4 [Combescure 2001]



mode de flambage, harmonique 2



# Plan

- Introduction au couplage mécanique-fiabilité du problème de flambage
  - le problème de fiabilité
  - le phénomène de flambage
  - un calcul original de couplage mécanique-fiabilité
- **Modéliser correctement le phénomène mécanique :**
  - **un nouvel élément tridimensionnel pour l'analyse non-linéaire**
- Limiter le temps du calcul mécanique :
  - calculs non-linéaires paramétrés particulièrement dédiés à la fiabilité
- Applications des méthodes paramétrées à des calculs de fiabilité

## Pourquoi un nouvel élément?

besoins pour les structures sous-marines	<i>COMU</i>	coque	massif
géométrie tridimensionnelle mince	axisymétrique	X	
raidisseur massif			X
matériau élasto-plastique	X	X	X
imperfections	modales	X	X

### → Choix d'un élément massif dégénéré pour les coques

- Intégration conventionnelle : contrôle des blocages [Lemosse, 2000]  
[Wriggers, 2000] [Ramm, 1999]
- Sous-intégration : contrôle des modes de Hourglass [Belytschko, 1981]
- Peu de travaux en élastoplastique [Wriggers, 2000]

## Nouvel élément : *SHB8PS*

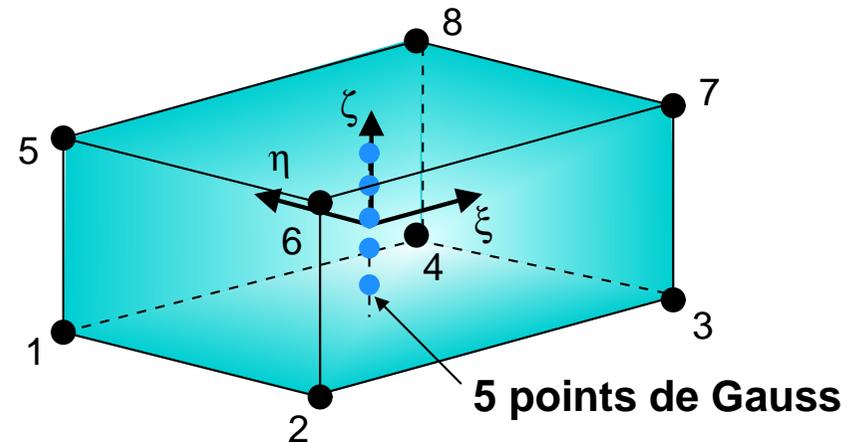
SHB8  
 explicite  
 code Plexus  
 [Meraim, Combescure, 2001]



SHB8PS  
 implicite  
 code Stanlax-Inca

### → *SHB8PS* :

- sous-intégration :  
 stabilisation des modes de Hourglass
- flexion élasto-plastique des structures minces :  
 stabilisation dans le domaine plastique



## Stabilisation de type déformation postulée

- PPV à trois champs :

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}, \mathbf{e}, \Pi) = \int_{\Omega_e} \left[ W(\mathbf{e}) + \Pi : (\nabla_s \mathbf{u} - \mathbf{e}) \right] d\Omega + V_e$$

- Déformation postulée [Fish, Belytschko 1988]:

$$\mathbf{e} = \nabla_s \mathbf{u} + \tilde{\mathbf{e}}$$

- En choisissant  $\tilde{\mathbf{e}}$  tel que :

$$\int_{\Omega_e} \Pi : \tilde{\mathbf{e}} d\Omega = 0$$

et avec l'opérateur gradient discrétisé tel que :

$$\mathbf{e} = \mathbb{B}\mathbf{U} + \tilde{\mathbb{B}}\mathbf{U}$$

- Alors l'équilibre discrétisé s'écrit :

$$\mathbb{K}\mathbf{U} + \tilde{\mathbb{K}}\mathbf{U} = \mathbf{F}_{\text{externe}}$$

- Rigidité :

$$\mathbb{K} = \int_{\Omega_e} \mathbb{B}^T \cdot \mathbb{E} \cdot \mathbb{B} d\Omega$$

- Rigidité due à la déformation postulée :

$$\tilde{\mathbb{K}} = \int_{\Omega_e} \tilde{\mathbb{B}}^T \cdot \tilde{\mathbb{E}} \cdot \tilde{\mathbb{B}} d\Omega$$

## Modes de déformations à énergie nulle

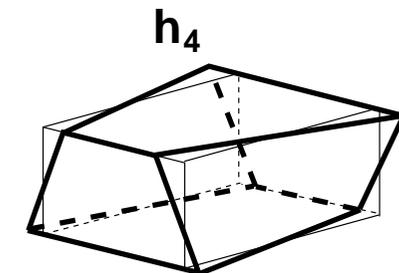
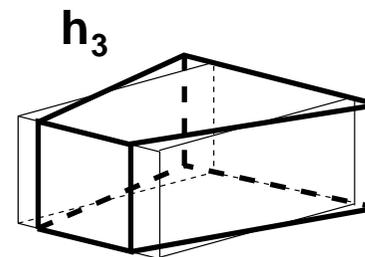
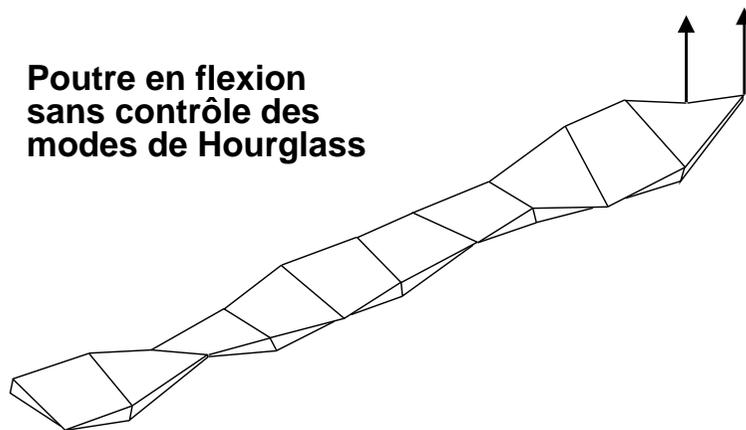
- Il existe des modes de déplacements à énergie nulle :

$$\mathbf{U}_H^T \cdot \mathbb{K} \cdot \mathbf{U}_H = 0$$

- On choisit  $\tilde{\mathbb{B}}$  de façon à faire travailler les modes de Hourglass :

$$\mathbf{U}_H^T \cdot (\mathbb{K} + \tilde{\mathbb{K}}) \cdot \mathbf{U}_H \neq 0$$

La dérivée des fonctions de forme de  $\tilde{\mathbb{B}}$  est prise comme une moyenne sur l'élément [Belytschko, 1993]



## Stabilisation des modes de Hourglass SHB8PS

- Le choix proposé dans Plexus [Meraim, Combescure 2001] s'avère trop rigide en implicite → choix d'un nouveau  $\tilde{\mathbb{B}}$  :

$$\tilde{\mathbb{B}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_{34}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{Y}}_{34}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{Z}}_{34}^T \\ \tilde{\mathbf{Y}}_{34}^T & \tilde{\mathbf{X}}_{34}^T & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{Z}}_{34}^T & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{X}}_{34}^T \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{Z}}_{34}^T & \tilde{\mathbf{Y}}_{34}^T \end{bmatrix} \quad \text{"Plexus"} \quad \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_{34}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{Y}}_{34}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{Z}}_4^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{"INCA"}$$

- Validation du nouvel opérateur :
  - l'équation  $\int_{\Omega_e} \Pi : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \, d\Omega = 0$  est vérifiée
  - validation numérique sur plusieurs cas tests
  - rigidité trop grande dans les cas plastiques

## Stabilisation adaptative en fonction de l'état plastique

- Loi élastique proposée dans Plexus : loi en **contraintes planes** associée à une loi **unidimensionnelle** dans la direction 3

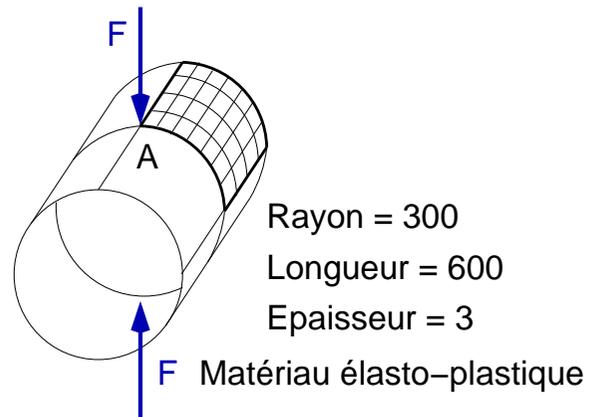
$$\mathbb{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \nu & 0 & & & \\ \nu & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1-\nu^2 & & & \\ \hline & & & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{array} \right]$$

- L'utilisation de cette loi pour la construction de  $\tilde{\mathbb{K}}$  introduit une rigidité trop importante dans les cas fortement plastiques

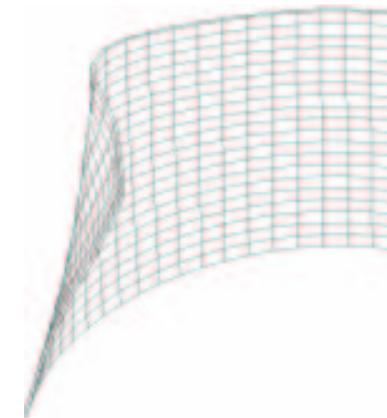
→ traitement adaptatif de la plasticité

$$\tilde{\mathbb{E}} = \frac{\tilde{E}_T}{E} \mathbb{E} \quad \text{avec} \quad \tilde{E}_T = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^5 E_T(P_k)$$

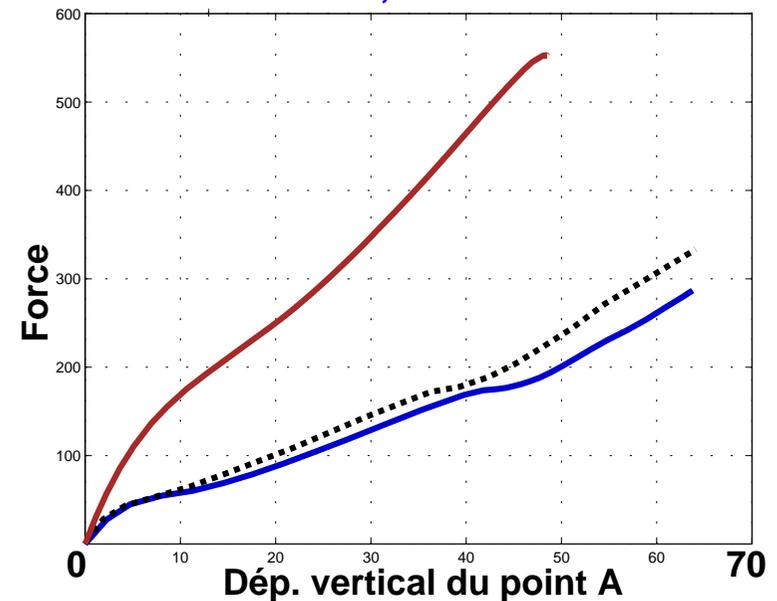
## Validation de l'élément : cylindre pincé



- Comparaison des résultats :
  - l'élément type Plexus est trop rigide
  - le nouvel élément se comporte correctement



... Wriggers [2000]  
 — SHB8, type Plexus  
 — SHB8PS, nouvelle formulation



# Calcul envisageable : cylindre ouvert

Comportement : matériau élasto-plastique

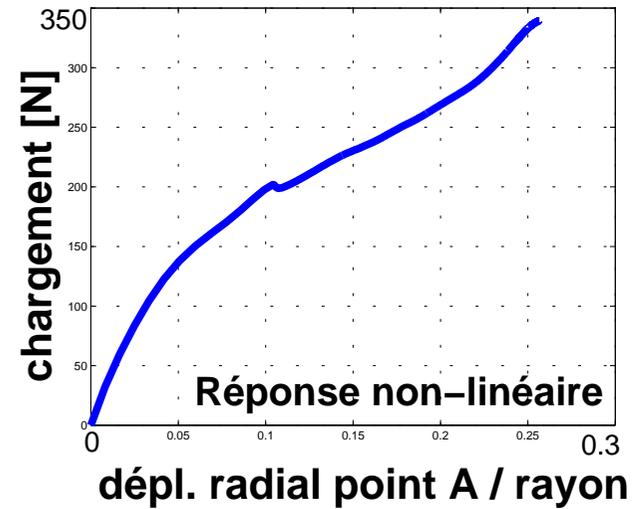
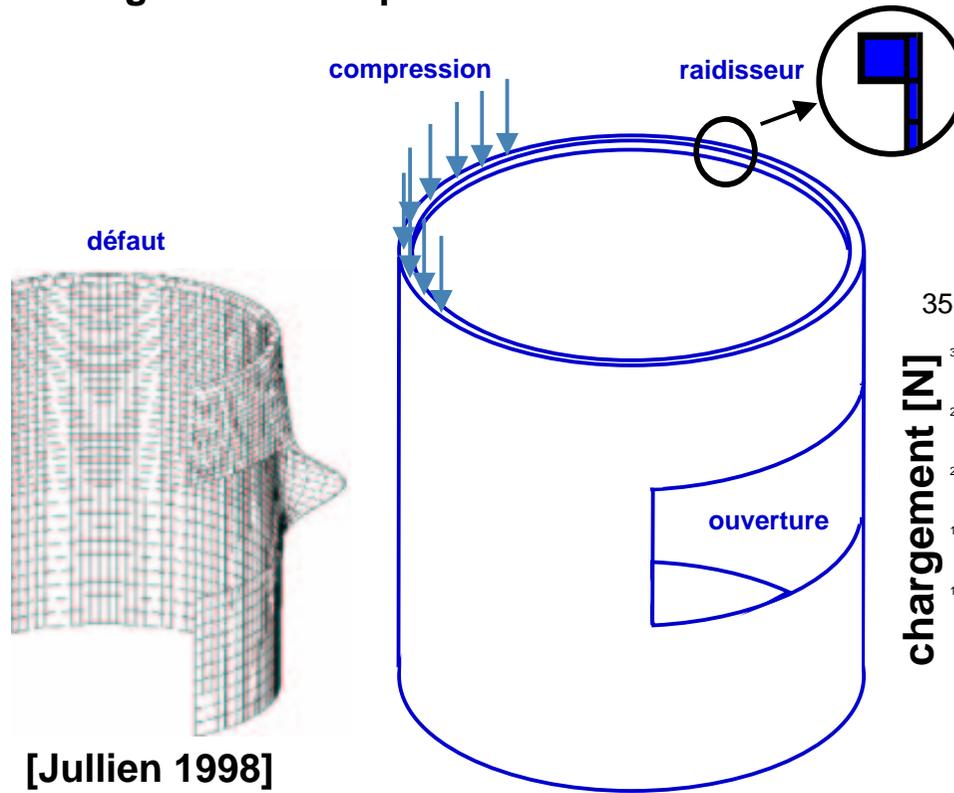
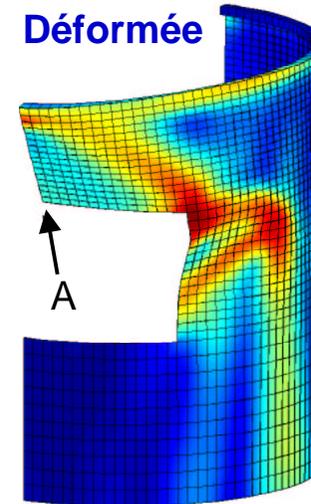
Géométrie :

partie massive : raidisseur

partie mince : ouverture de 90°

défaut géométrique : tridimensionnel de forme

Chargement : compression axiale



## Conclusions sur l'élément *SHB8PS*

- Apports par rapport à l'élément de Plexus :
    - stabilisation rendue moins rigide
    - stabilisation adaptative en fonction de l'état plastique
    - implantation des quantités nécessaires au flambage et à la formulation implicite
  - Avantages de ce nouvel élément :
    - modélisation des structures tridimensionnelles minces et épaisses
    - formulation n'utilise que des degrés de liberté en déplacement
    - permet de traiter les problèmes suivants : flexion élasto-plastique, grands déplacements et non-linéaire
- élément intéressant pour les problèmes abordés en fiabilité

# Plan

- Introduction au couplage mécanique-fiabilité du problème de flambage
  - le problème de fiabilité
  - le phénomène de flambage
  - un calcul original de couplage mécanique-fiabilité
- Modéliser correctement le phénomène mécanique :
  - un nouvel élément tridimensionnel pour l'analyse non-linéaire
- **limiter le temps du calcul mécanique :**
  - **calculs non-linéaires paramétrés particulièrement dédiés à la fiabilité**
- Applications des méthodes paramétrées à des calculs de fiabilité

## Les méthodes pour le calcul paramétrique

- MÉTHODES ASYMPTOTIQUES [Koiter 1945]

- développement en fonction de l'amplitude du défaut

$$\mathbf{U} = \xi \mathbf{U}_1 + \xi^2 \mathbf{U}_2 + \xi^3 \mathbf{U}_3 \dots$$

$$\lambda - \lambda_c = \xi \lambda_1 + \xi^2 \lambda_2 + \xi^3 \lambda_3 \dots$$

- appliquées à la fiabilité [Thieffry 1998]

- + introduction explicite du défaut

- n'accepte pas de grandes variations du défaut

- MÉTHODE ASYMPTOTIQUE NUMÉRIQUE [Azrar, Cochelin, Damiel, Potier-Ferry 1991]

- chaque inconnue du problème est développée en série entière en fonction d'un paramètre de contrôle

## Les méthodes pour le calcul paramétrique

- SYSTÈME AUGMENTÉ [Wriggers, Wagner 1988]

$$G(\mathbf{u}, \lambda, \mathbf{X}) = \left\{ \begin{array}{ll} F(\mathbf{u}, \lambda, \mathbf{X}) & \text{équation d'équilibre} \\ g(\mathbf{u}, \lambda, \mathbf{X}) & \text{critère de point limite} \\ N(\mathbf{u}, \lambda, \mathbf{X}) & \text{pilotage} \end{array} \right\} = 0$$

- résolution dans le plan  $(\mathbf{X}, \lambda_c)$  :

par la MAN [Baguet, Cochelin, 1994, 2001]

incrémentale [Eriksson, Pacoste, Zdunek, 1997]

- + recherche du trajet du point limite en fonction des paramètres
- calcul de la dérivée par rapport aux paramètres
- pas de résultats si le point limite est plastique

## Les méthodes pour le calcul paramétrique

- MÉTHODES ANALYTIQUES [Mohamed, Lemaire 1998]
  - sensibilité de l'équilibre aux paramètres

$$\mathbb{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}_{\text{externe}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbb{K}^{-1} \left( \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{externe}}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbb{K}}{\partial x} \mathbf{U} \right)$$

- + calcul rapide de la sensibilité
- calcul de la dérivée par rapport aux paramètres
- matrice tangente non définie au point limite

## Les méthodes pour le calcul paramétrique

- MÉTHODE LATIN [Ladevèze 1985]
  - résolution sur tout l'intervalle de temps et tout l'espace
  - schéma itératif à deux étapes

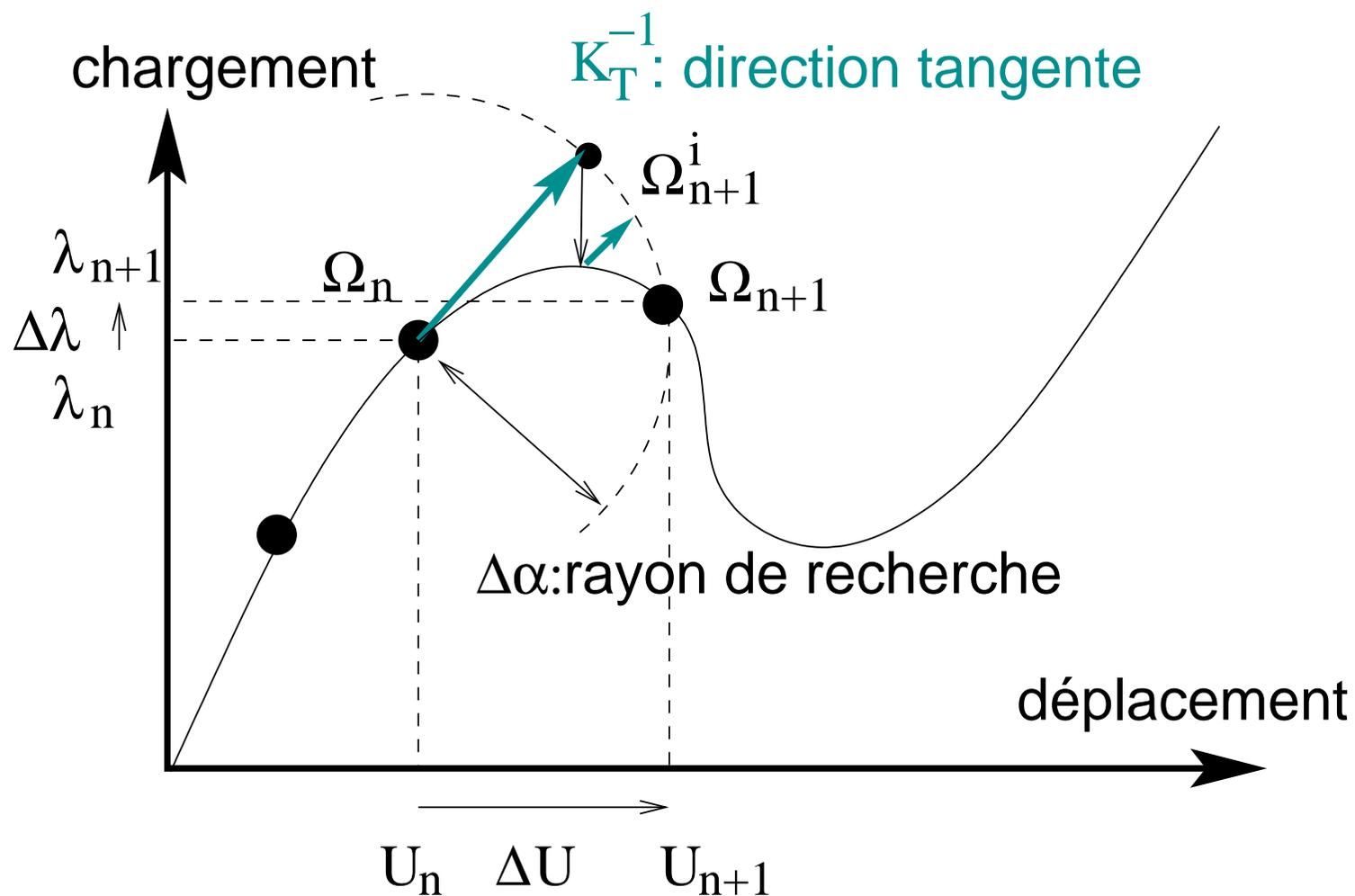
$$\text{Solution} = \sum \text{Fonction}(\text{temps}) \cdot \text{Fonction}(\text{espace})$$

- appliquée à des calculs paramétrés par [Boucard, 2001] et [Vidal, Allix, 2001, 2002]
- + ré-utilisation avantageuse de la base de fonctions d'espace
- développement délicat

## Nouvelle approche : méthodes paramétrées *MP* et *MPC*

- Les méthodes *MP* et *MPC* se veulent de passer outre les inconvénients des méthodes précédentes :
  - variations significatives des paramètres
  - comportement matériau élasto-plastique
  - pas de calculs analytiques des dérivées
- Elles sont basées sur l'algorithme incrémental de Newton-Raphson avec pilotage par longueur d'arc [Riks, 1979]

## Algorithme incrémental avec pilotage



## Convergence vers l'équilibre

- Deux équations à satisfaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathbf{U}_{n+1}^{i+1} = \Delta \lambda_{n+1}^{i+1} \quad \Delta \mathbf{U}_{n+1}^{\text{lin}} + \Delta \mathbf{U}_{\text{NL}}^{i+1} \\ \Delta \mathbf{U}_n^T \cdot \Delta \mathbf{U}_{n+1}^{i+1} = \Delta \alpha \end{array} \right.$$

- L'incrément non-linéaire est donné par le résidu :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{U}_{\text{NL}}^{i+1} &= \Delta \mathbf{U}_{\text{NL}}^i + \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{R}^{i+1} \\ \mathbf{R}^{i+1} &= \mathbf{F}_{\text{interne}}^{i+1} - \mathbf{F}_{\text{externe}}^{i+1} \end{aligned}$$

- Le résidu assure la convergence vers un point d'équilibre

## Méthode paramétrée *MP*

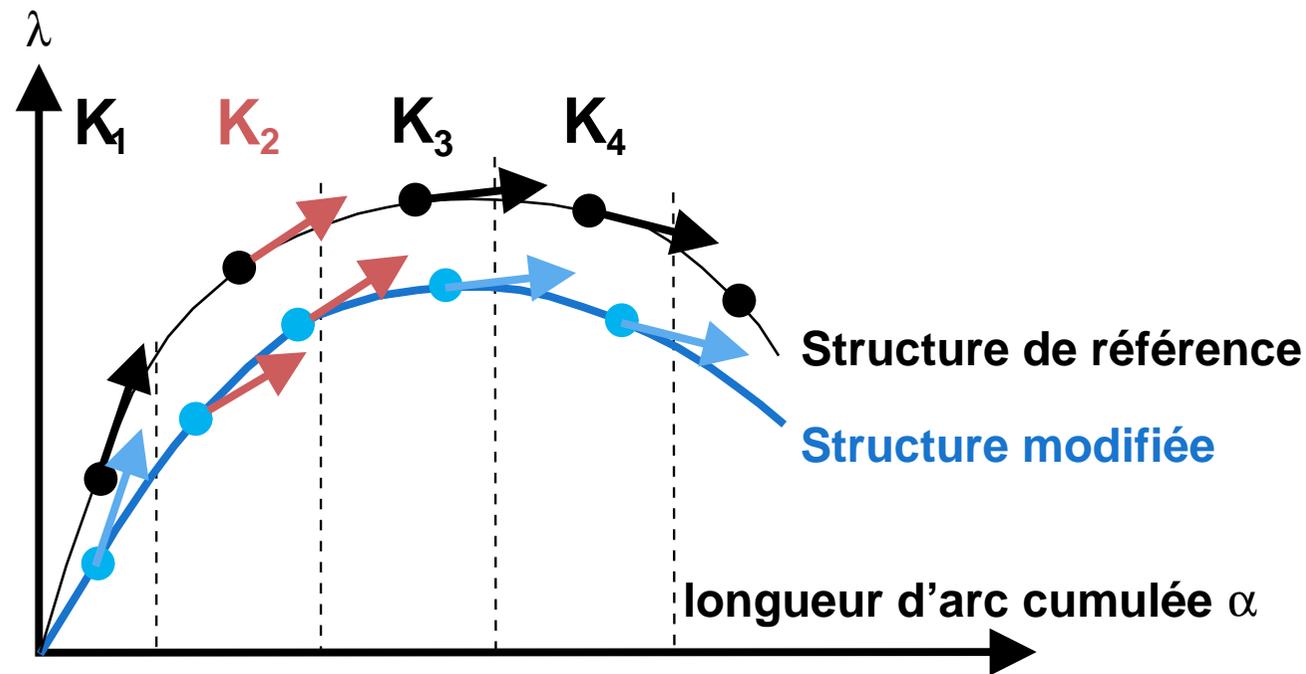
Trois constatations :

- un calcul de fiabilité demande des calculs mécaniques proches
- la matrice tangente peut être approximée
- l'assemblage et la factorisation de cette matrice prend une grande part du temps de calcul

**Première idée** : utiliser les mêmes factorisations des matrices tangentes pour tous les calculs ayant des jeux de paramètres voisins

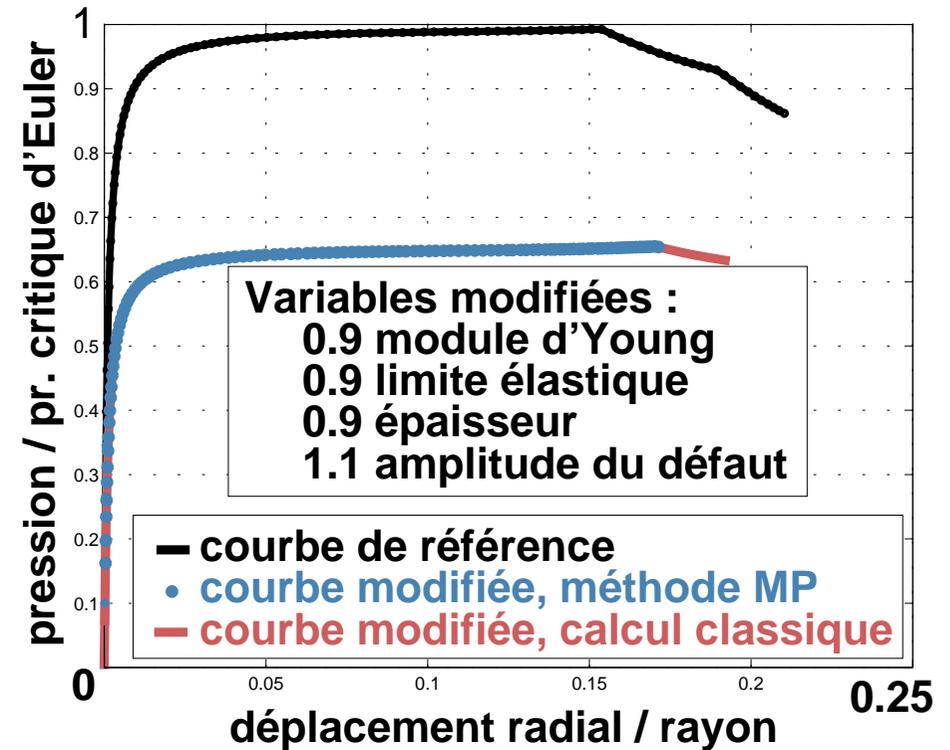
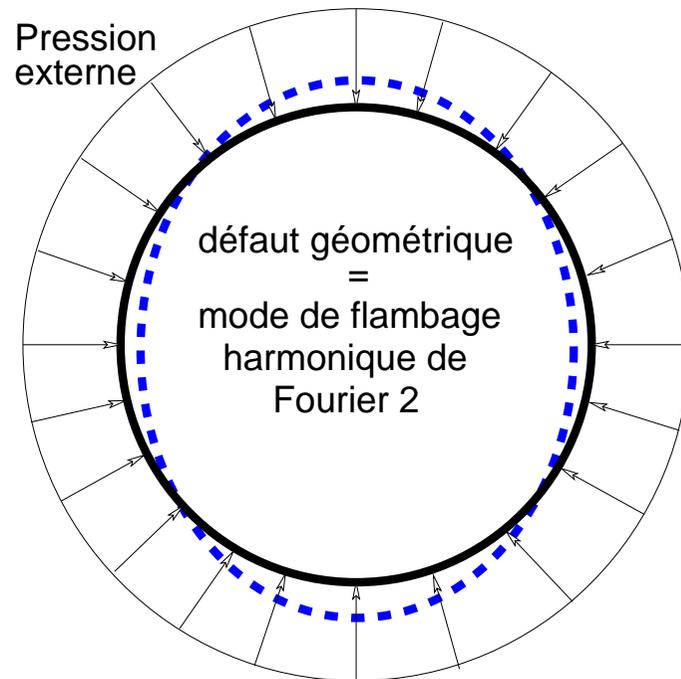
- Les factorisations de ces matrices sont sauvegardées lors du calcul de référence
- Le calcul de référence est en général effectué pour les valeurs médianes des paramètres

## Choix de la matrice à utiliser



- Le choix de la matrice à utiliser est basé sur la longueur d'arc cumulée  $\alpha$
- L'algorithme reste inchangé

## Exemple d'un anneau en pression externe



méthode	nb factorisations	nb itérations équilibre
classique	113	2500
paramétrée	0	4000

## Méthode paramétrée avec correction *MPC*

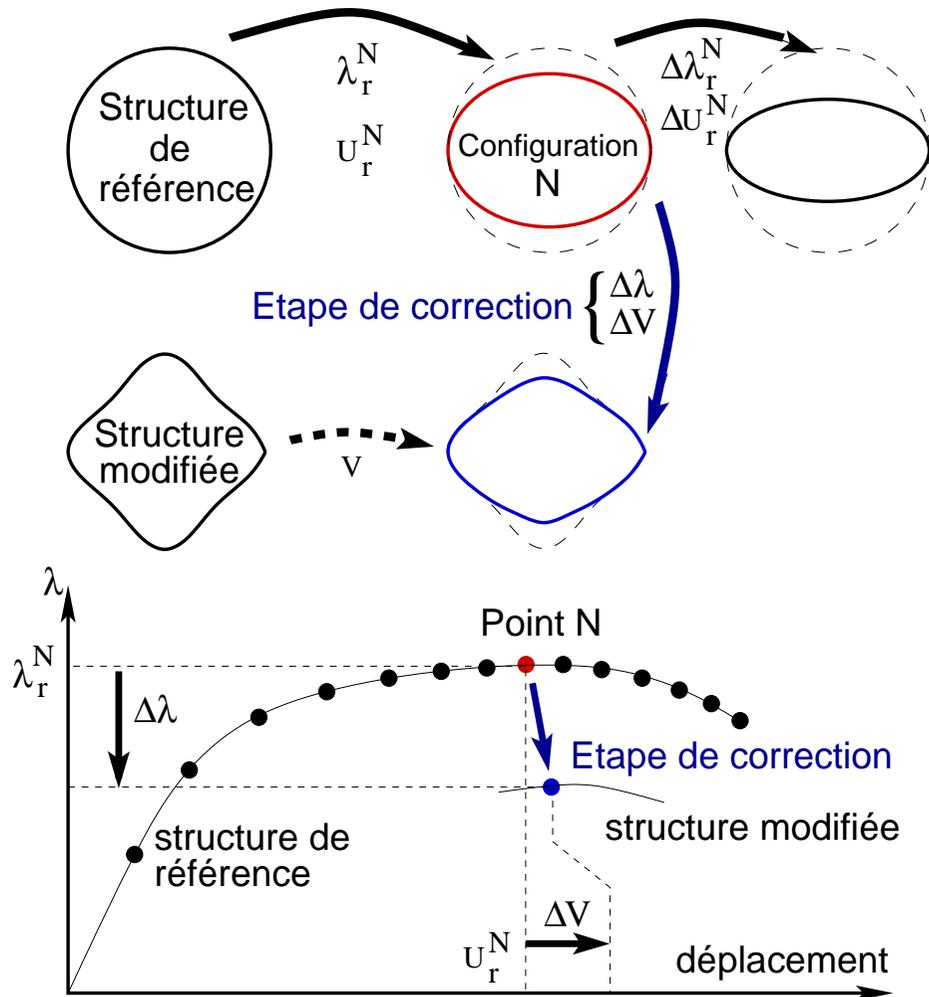
Quatrième constatation :

- seul le point limite est utile à la fiabilité

Deuxième idée : calculer uniquement le sommet de la réponse modifiée

- Initialisation du calcul modifié avec les grandeurs d'un point  $N$  de la courbe de référence
- Recherche de l'image de ce point sur la réponse de la structure modifiée par une étape de correction

## Etape de correction



- Initialisation

$$\mathbf{V} = \mathbf{U}_r^N \quad \lambda = \lambda_r^N$$

$$\mathbb{K}_T^{-1} = \mathbb{K}_{T_r}^{N-1} \quad \Omega_0 = \Omega_{\text{modifiée}}^0$$

- Pilotage

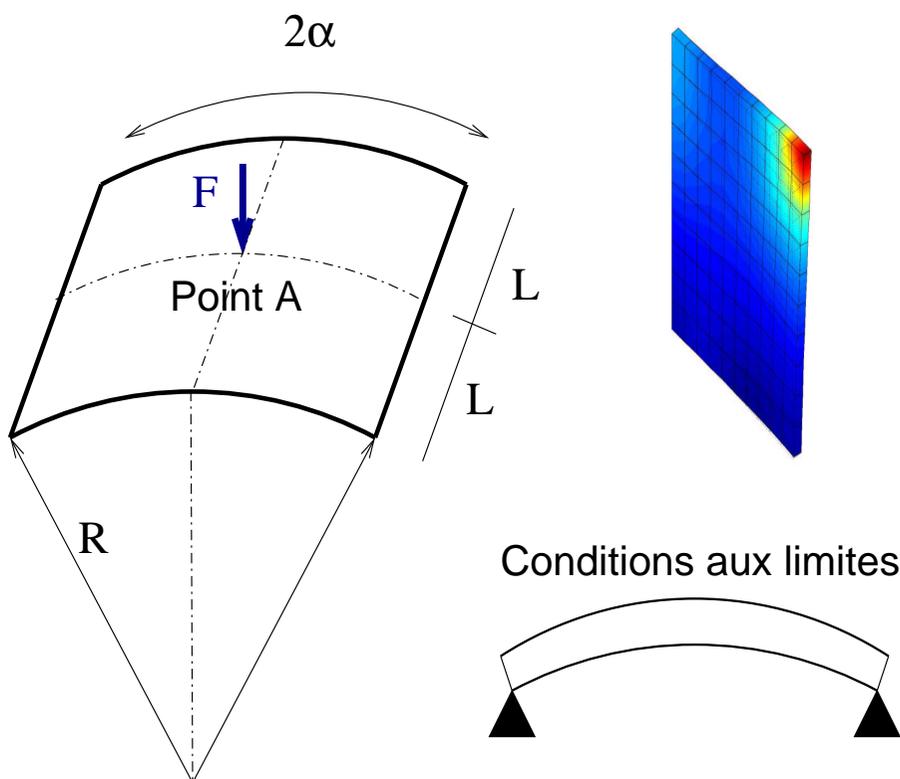
$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathbf{V}^{i+1} = \underbrace{\Delta \lambda^{i+1} \Delta \mathbf{V}_L}_{\text{linéaire}} + \underbrace{\Delta \mathbf{V}_{NL}^{i+1}}_{\text{non linéaire}} \\ \|\mathbf{U}_r^N + \Delta \mathbf{V}^{i+1}\| = \|\mathbf{U}_r^N\| \end{array} \right.$$

- Contrôle de l'équilibre :  
résidu, Lagrangien total

$$\mathbf{R}^i = \mathbf{F}_{\text{interne}}^i(\mathbf{V}, \lambda) - \mathbf{F}_{\text{externe}}^i(\mathbf{V}, \lambda)$$

$$\Delta \mathbf{V}_{NL}^{i+1} = \Delta \mathbf{V}_{NL}^i + \mathbb{K}_{T_r}^{N-1} \mathbf{R}^i$$

## Mise en place de la *MPC* sur l'exemple d'un panneau cylindrique

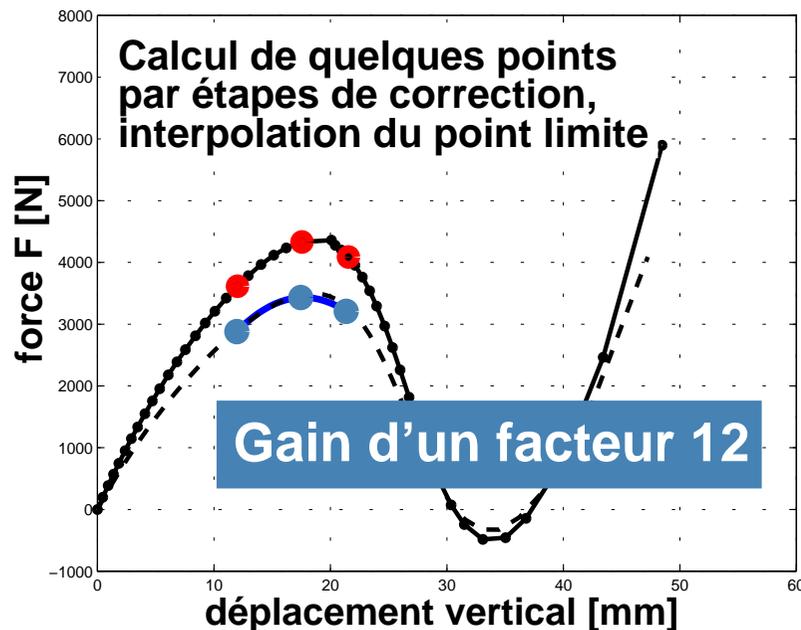


- calcul avec élément SHB8PS
- matériau élastique
- variable modifiée :

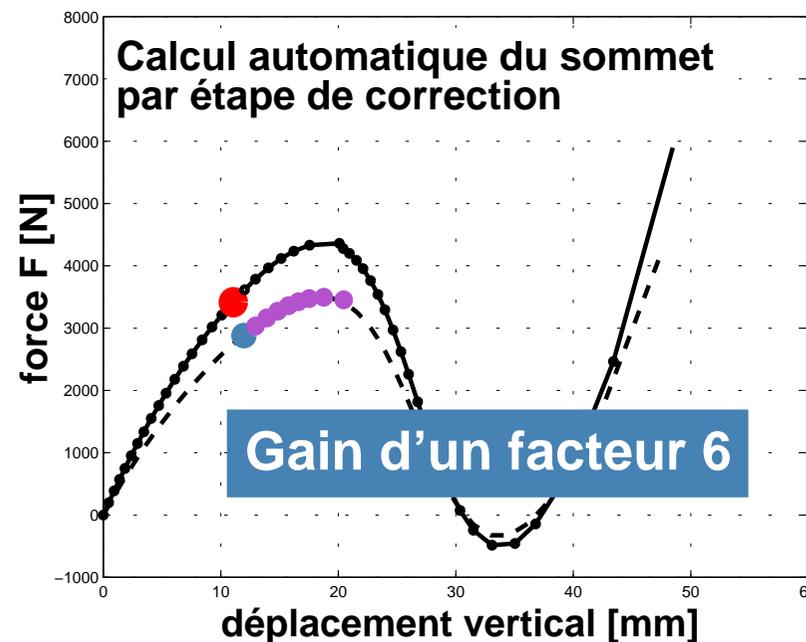
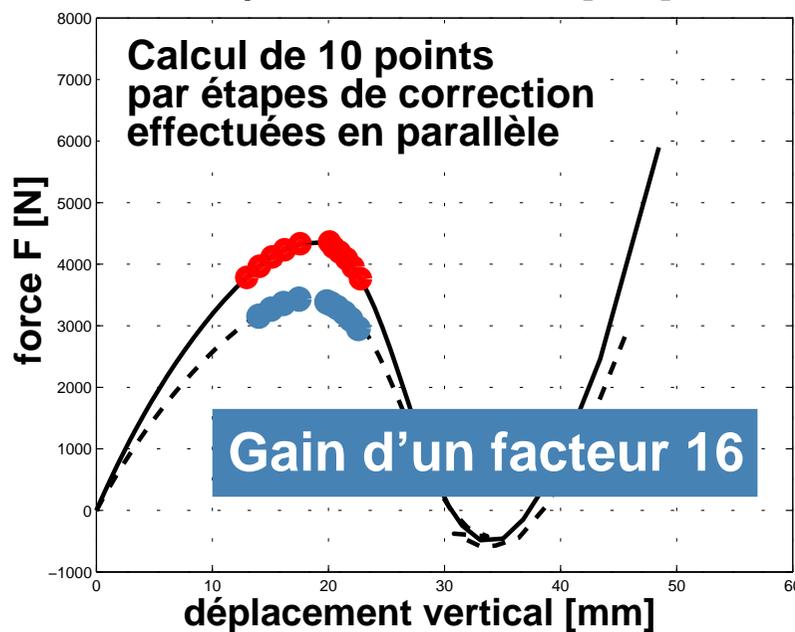
module d'Young :

$$E_0 = 3100 \text{ MPa}$$

$$E_m = 2500 \text{ MPa}$$

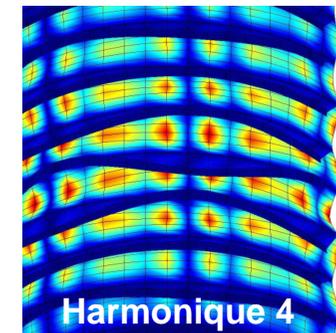
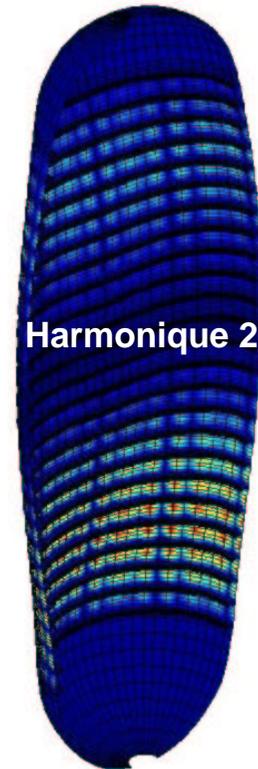
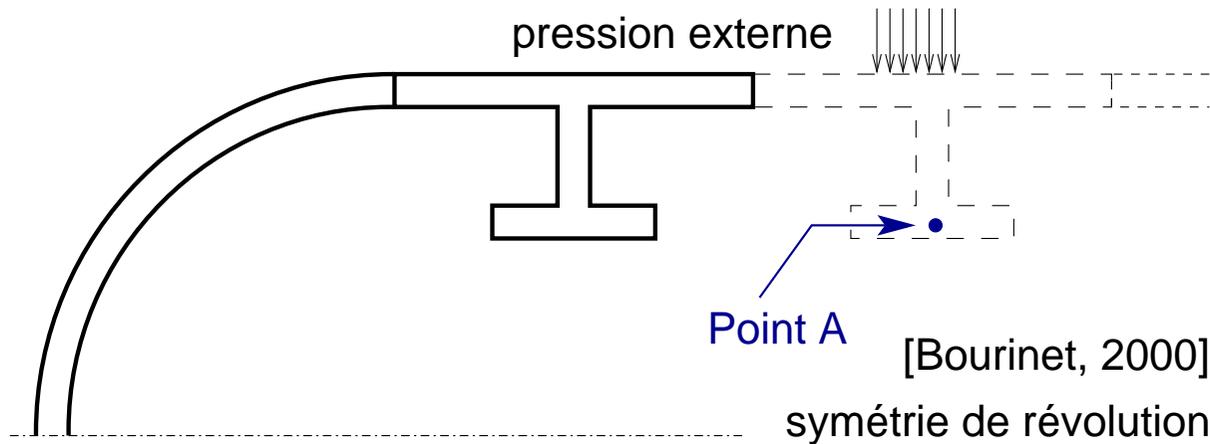


- Courbe de référence
- - Courbe modifiée
- Points calculés par MPC
- Points de départ sur la courbe de référence
- Points calculés par MP



## Structure sous-marine, données mécaniques

- Structure axisymétrique
  - Défauts géométriques parallèles aux modes de flambage des harmoniques 2 et 4
- 320 éléments *COMU*



## Structure sous-marine, problème de fiabilité

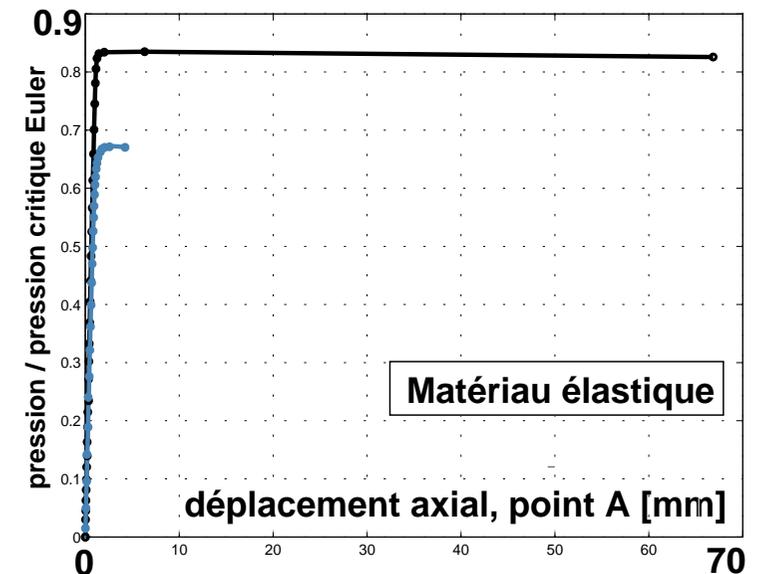
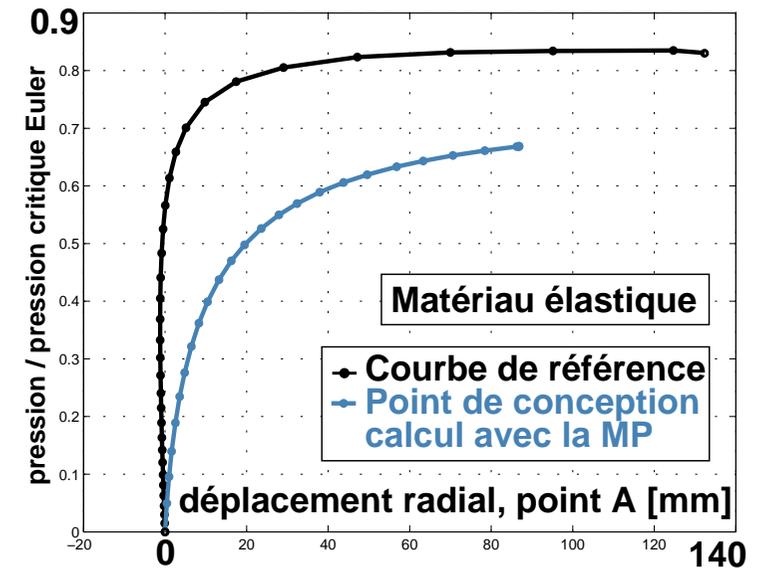
- Deux études de fiabilité : élastique et élastoplastique
- Quatre variables aléatoires, gaussiennes, décorrélées :

variable	moyenne	écart type
épaisseur	24 mm	1,2 mm
loi de comportement	1	0.02
défaut harm. 2	5 mm	2,5 mm
défaut harm. 4	2,5 mm	1,25 mm
$P_0$	$0,8 P_{cr}(\mathbf{X}_{\text{médiane}})$	déterministe

- Fonction de performance :  $G(\mathbf{X}) = P_{cr}(\mathbf{X}) - P_0$

## Structure sous-marine, résultats

- Indice de fiabilité :
  - élastique,  $\beta = 4,66$
  - plastique,  $\beta = 4,32$
- Gain en temps de calcul par la MP :
  - élastique, facteur 4
  - élasto-plastique, facteur 1,5
- Problème de l'élasto-plastique : temps relatif passé dans les itérations de plasticité important



## Intérêts des méthodes paramétrées *MP* et *MPC*

- calcul précis du point limite pour des variations de 10 à 20% des paramètres
  - pas de calculs analytiques des dérivées
  - indépendantes du type d'élément fini
  - possibilité d'utiliser le parallélisme (*MPC*)
  - comportement matériau élasto-plastique
- Permettent de traiter les problèmes mécaniques abordés en fiabilité des structures sous-marines par rapport au flambage
- Le gain en temps de calcul varie d'un facteur 1,5 à 15 suivant le problème et la méthode adoptée

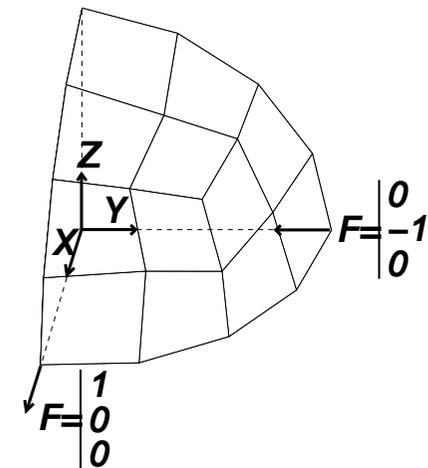
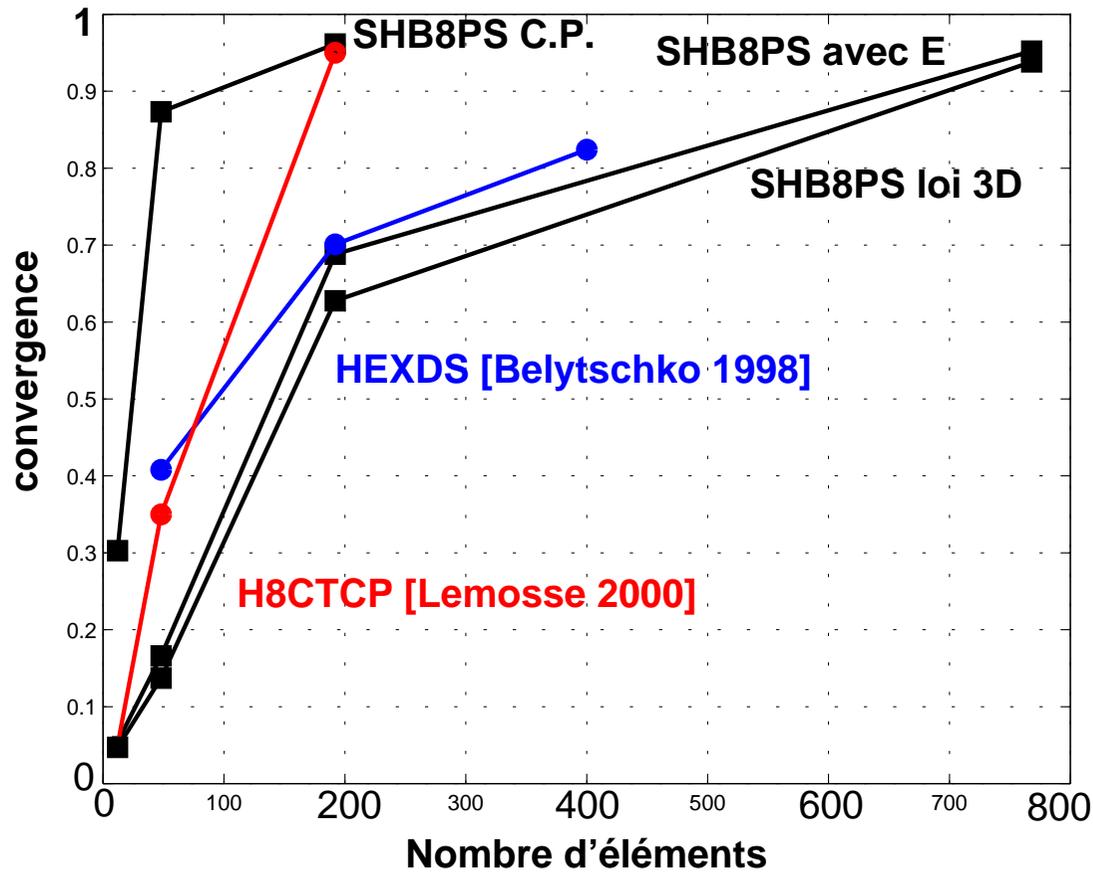
## Conclusions et apports des travaux pour la fiabilité

- L'élément *SHB8PS* répond aux besoins de modéliser correctement les problèmes mécaniques de structures sous-marines :
  - structures minces tridimensionnelles, pouvant être épaisses
  - imperfections
  - comportement élasto-plastique
- Les méthodes paramétrées permettent de mener rapidement les calculs demandés lors du couplage mécanique-fiabilité :
  - couplage aisé avec un algorithme de fiabilité
  - extensibles aux calculs paramétrés non-linéaires plus généraux

# Perspectives

- Calcul mécanique :
  - *SHB8PS* :
    - \* stabilisation adaptative en fonction de la distorsion de l'élément
    - \* proposer d'autres versions de l'élément : comportement tridimensionnel complet, hypothèse des contraintes planes
  - *MP* et *MPC* :
    - \* traitement des changements de modes prépondérants :
      - utilisation de la méthode BFGS :  
actualisation de la factorisation de la matrice tangente
- Couplage mécanique-fiabilité :
  - peu utilisé, il permet pourtant de répondre à une question de l'ingénieur : quels sont les défauts les plus critiques?

## Test SHB8PS avec différentes lois de comportement



## Poutre en S

- impact sur une poutre de section carrée
- matériau élasto-plastique
- déformation cumulée plastique maximum : 41%

